Lineær approksimasjon

Funksjonsverdien til $f(x)$ om $x=a$ tilnærmes med tangenten til $f(x)$ i punktet $(a, f(a))$:

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)}$$

Taylorpolynom av grad n

Taylorpolynomet $P_n(a)$ til funksjonen $f(x)$ som er *n* ganger deriverbar i $x=a$ er

$$\begin{aligned} P_n(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_n(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

Eksempel 1

Finn Taylorpolynomet $P_4(x)$ med *a*=0 for $f(x)=e^x$.
Polynomet skal brukes til å beregne $\sqrt{e}$.

Vi har

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = e^x \quad ,$$

og

$$\begin{aligned} e^x &\approx P_4(x) \\ &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{e^c}{5!}x^5 \end{aligned}$$

Beregner så $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$,

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{e^c}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1.6484$$

∃

MATLAB

MATLAB gjør beregninger og viser resultater i et tekstvindu:

```
>> taylor(exp(x), 0)
ans =
x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1
```

Svaret er ikke sortert etter stigende orden slik vi er vant til, men alle ledd er der.

Restledd - feiloverslag

En funksjon $f(x)$ som er $n+1$ ganger deriverbar på et åpen intervall som inneholder både *a* og *x* er lik summen av taylorpolynomet P_n av grad *n* or restleddet R_n :

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{for en } c \text{ mellom } a \text{ og } x$$

Restleddet gir avvik mellom funksjon og polynom, drøftes mhp. *c*.

Eksempel 2

Anslå feilen i beregning av $\sqrt{e}$ når vi bruker taylorpolynomet av 4. grad for e^x .

Fortsetter med taylorpolynomet fra eksempel 3,

$$e^x=P_4(x)+R_4(x)$$
$$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{e^c}{5!}x^5$$

Beregner så $\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$,

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{e^c}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{211}{128}+\frac{e^c}{3840}=1.6484+0.0002604e^c$$

Den 'gunstigste' verdien for *c* ligger et sted mellom 0 og 1/2. Den mest ugunstige verdien vi kan sette inn er her *c* =1/2, som gir størst verdi på restleddet. Her bruker vi den tilnærmede verdien som anslag, og får , $R_5=1.65/3840=0.00043$.

Ǝ

Tallfølger

{1, 3, 5, 7, 9}	-endelig tallfølge
{1, 3, 5, 7, ...}	-uendelig tallfølge
$\{a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots\}$	-uendelig tallfølge
a_n	-det generelle leddet
$\{a_n\}$ eller $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	-hele tallfølgen

Eksplisitt definisjon: $a_n = 2n-1$, $n\geq 1$ {1, 3, 5, 7, ... }

Rekursiv definisjon: $a_{n+1} = a_n + 2$ og $a_1 = 1$ {1, 3, 5, 7, ... }

Det *generelle leddet* er en funksjon med heltall som argument (indeksvariabelen), $a_n = a(n)$.

Eksempel 3

$$a_n = a(n) = 1 - \frac{1}{n} \quad , \quad n \geq 1 \qquad \rightarrow \qquad \{a_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$$

ꟻ

Konvergens av tallfølger

Konvergent tallfølge: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, eller også for et gitt tall ϵ , $|a_n - L| < \epsilon$ for alle $n \geq N$.

Eksempel 4

$$a_n = \frac{6n}{3n-5} \quad \text{gir} \quad \{-3, 12, \frac{9}{2}, \frac{24}{7}, 3, \frac{36}{13}, \frac{21}{8}, \ldots\} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{3n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{3-5/n} = 2$$

ꟻ

Hvis grensene $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ eksisterer med *A* og *B* som reelle tall, så er:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = AB \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad \begin{array}{l} \text{der } B \neq 0 \\ \text{og } b_n \neq 0 \text{ for } n > N \end{array}$$

Substitusjonslov - følgefunksjon

Hvis $a_n = f(n)$ for $n \in \mathbb{N}$ så vil $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ gi at $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Grensedrøftingen gjøres med l'Hôpitals regel i uttrykk av typen 0/0 eller ∞/∞.

Klemlov

Hvis $a_n \leq b_n \leq c_n$ for alle *n* og $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$, så er også $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Voksende – avtakende

Monotont voksende:	$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{n-1} \le a_n \le, \ldots$
Strengt monotont voksende:	$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-1} < a_n < , \ldots$
Monotont minkende:	$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_{n-1} \ge a_n \ge, \ldots$
Strengt monotont minkende:	$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_{n-1} > a_n > , \ldots$
Begrenset med øvre skranke M :	$a_n \le M$ for alle $n \in \mathbb{N}$
Begrenset med nedre skranke m:	$a_n \ge m$ for alle $n \in \mathbb{N}$
Begrenset mellom m og M :	$m \le a_n \le M$ for alle $n \in \mathbb{N}$

Monotoni kan avgjøres ved å drøfte $d = a_{n+1} - a_n$ eller $\lim f'(x)$ for følgefunksjonen *f*(*x*).

l´Hôpital's regel for tallfølger

Hvis $a_n = f(n)$, $b_n = g(n)$ og $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to\infty}{\to} \frac{\infty}{\infty}$, så er $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Eksempel 5

- Finn et uttrykk for det generelle leddet i tallfølgen $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{9}{16}, \frac{49}{128}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$.
- Finn grenseverdien for leddene.

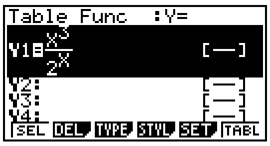
Noen av brøkene er forkortet, prøver med andre verdier for nevnere,

$$\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{9}{16}, \frac{49}{128}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \frac{64}{256}, \ldots\right\}$$

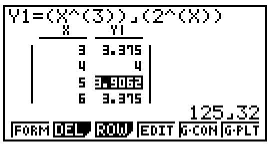
Det generelle leddet er $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Grenseverdidrøfting: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{'\infty'}{'\infty'} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{(\ln 2)2^n} = \frac{'\infty'}{'\infty'} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{(\ln 2)^2 2^n} = 0$ ∃

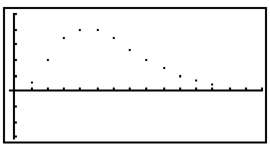
Tallfølge med kalkulator



Velg TABLE fra hovedmeny og tast inn uttrykket for det generelle leddet, for eksempel $a_n = \frac{n^3}{2^n}$ med **x** som variabel i stedet for n . I denne sammenhengen vil **x** variere i steg på 1 (eller andre steg om vi vil).
Velg SET og sett opp hvor mange ledd tabellen skal ha.



Velg så TABL (F6) og vi får en tabellover n (x) og verdiene for tilhørende elementverdier. Bla utover i tabellen med piltastene.
Legg merke til at det som verdi er markert 3.9062, men verdien er også gitt som brøk, 125 , 32 = 125/32.



De enkelte elementverdiene kan tegnes i en graf med *n* (x) som horisontal akse ved å velge G-PLT.

Rekker

Ei rekke er summen av leddene i en tallfølge, $S_\infty = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$.

Summen av de *n* første ledd i rekka er *n*-te delsum, $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Tallfølgen $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$ danner rekka $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ der $S_2 = \frac{3}{4}$ og $S_4 = \frac{15}{16}$.

Rekka $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergerer mot *S* hvis *n*-te delsum konvergerer mot *S*, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

For at en rekke skal kunne konvergere må $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ellers har vi divergens.

Summen av to rekker der begge konvergerer blir en ny konvergerende rekke.
Summen av to rekker der minst en divergerer blir en ny divergerende rekke.

De to konvergerende rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ med summer A og B danner nye konvergerende rekker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$c\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A \qquad (c\text{=konstant})$$

Aritmetisk rekke, $a_{n+1} = a_n + d$. Hvis første ledd er a er $a_n = a + (n-1)d$. Divergerer!

Geometrisk rekke

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} ak^n \qquad \text{(første ledd, med indeks 0 er } a\text{)}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot k \quad .$$

Den *n*-te delsum er $S_n = a\frac{k^n - 1}{k - 1}$.

Hvis $|k| < 1$ konvergerer rekka til $\lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{1}{1-k}$.

Teleskoprekke

har påfølgende ledd som summeres til 0, som regel av formen

$$(A-B) + (B-C) + (C-D) + \ldots + (Z-Y) = A - Y$$

som konvergerer til *A* hvis siste ledd går mot null.

Eksempel 6

Rekkesummen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ kan finnes slik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \begin{matrix}\text{Delbrøk-}\\ \text{spalting}\end{matrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{n} \to 1$$

P-rekka

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer hvis $p > 1$ og divergerer hvis $p \le 1$. Harmonisk rekke: *p*=1.

Potensrekker

Rekka

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{i=0}^{n} c_i (x-a)^i$$

er ei potensrekke i (*x*-*a*).

Hvis *a* = 0 får vi spesialtilfellet $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$.

Det generelle leddet a_n er en funksjon, $a_n = f(n, x)$, der *n* er heltall og *x* er et reelt tall.

Hvis ei potensrekke konvergerer definerer den en funksjon, $f(x)$.

Taylorrekker

Et taylorpolynom er en rekke med restledd utviklet for en funksjon, $f(x) = P_N(x) + R_N(x)$.

Hvis $\lim_{N \to \infty} R_N = 0$ vil rekka konvergere, slik at $\lim_{N \to \infty} P_N(x) = f(x)$.

Definisjonen av en taylorrekke:

Hvis funksjonen f er uendelig mange ganger deriverbar omkring $x = a$ er taylorrekka til f :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

En ***maclaurinrekke*** er lik en taylorrekke for *a*=0.

Kjente potensrekker

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-x)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + x^n n! + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{for } -1 < x \le 1$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{for alle } x$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{for alle } x$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{for } |x| \le 1$$

Binomisk rekke

Hvis m er et ikke-negativt heltall:

$$(1+x)^m = x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2} + \ldots + \binom{m}{m-1} x + 1 \qquad \binom{m}{k} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

Dette er ikke ei rekke, men formelen for et polynom med (opptil) *m*+1 ledd.
For andre verdier av *m* får vi *binomisk rekke* eller *binomilarekka*,

Hvis m ikke er et heltall:

$$(1+x)^m = 1 + m x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-i+1)}{i!} x^i$$

Derivasjon, integrasjon, substitusjon

Hvis rekka $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ konvergerer mot $f(x)$ kan vi

derivere ledd for ledd, $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n (x-a)^{n-1}$ som konvergerer mot $f'(x)$,

integrere ledd for ledd, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \cdot (x-a)^{n+1}$ som konvergerer mot $\int_a^x f(x)\,dx$,

og substituere x med u(x) som konvergerer mot $f(u(x))$.

- Vi kan multiplisere, dividere, integrere og derivere rekkene ledd for ledd,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + .. \qquad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + .. \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\right) dx$$

- Vi kan substituere *x* med funksjoner av *x*,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad \frac{1}{1-\sqrt{x}} = 1 + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + \ldots \qquad \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$

Konvergenstester

En rekke er summen av de enkelte leddene. Rekka konvergerer hvis summen nærmer seg en grense.
En nødvendig betingelse for konvergens av rekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er at $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, men det er ikke nok.

Integraltesten

Hvis $a_n = f(n)$, der $f(x)$ er positiv, kontinuerlig og ikke-økende for alle $x \geq N$,

så vil $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ enten begge konvergere eller begge divergere.

Integralet i testen er et *uegentlig integral* – det løses ved å utføre integrasjonen med en viss øvre grense *s* og deretter drøfte resultatet når *s* vokser mot uendelig.

Sammenlikningstesten

$\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er to tallfølger der $a_n \geq b_n \geq 0$ for $n \geq N$,

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, vil $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergere.

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerer, vil $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergere.

Her er noen rekker som ofte brukes til sammenlikningstesten:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{g^n}$: Geometrisk rekke som konvergerer for $g > 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$: Konvergerer for $p > 1$, divergerer for $p \leq 1$

Grensesammenlikningstesten:

La $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være to positive rekker slik at $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ der $0 > L > \infty$,

da vil $\sum a_n$ og $\sum b_n$ enten begge konvergere eller divergere.

Eksempel 7

Finn ut om rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3}$ konvergerer.

Prøver med grensesammenlikningstesten mot rekka med ledd $b_n = \frac{1}{n^2}$ som konvergerer.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{n^3} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 2n^2}{n^3} = 1 = L$$

Vi har at $0 < L < \infty$ og rekka konvergerer.

∃

Forholdstesten

Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ har bare ledd $a_n \neq 0$ og konvergerer/divergerer slik:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L = \begin{cases} < 1 & \text{Konvergens} \\ > 1 & \text{Divergens} \\ = 1 & \text{Ingen konklusjon} \end{cases}$$

Her danner vi forholdet mellom to ledd som følger etter hverandre, det siste i telleren. Testen gir ikke konklusjon hvis grenseverdien $L = 1$, da må vi ty til andre testmetoder.

Forholdstesten kan også formuleres for en rekke med bare *positive ledd* – og er da lik med definisjonen ovenfor der absoluttverditegnet er sløyfet.

Eksempel 8

Finn ut om rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3}$ konvergerer.

Tester forholdet $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{n+1+3}\cdot\frac{n+3}{3^n}\right| = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+3}{n+4}\right| = 3$

Vi har at $L>1$ og rekka divergerer.

∃

Alternerende rekke

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergerer hvis

1 - $|a_n|>|a_{n+1}|>0$ for $n\geq N$ og

2 - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Hvis ei alternerende rekke konvergerer mot *S*, vil feilen vi gjør ved å summere *n* ledd være mindre enn absoluttverdien av det første leddet som kuttes ut.

Absolutt konvergens

har vi hvis både $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergerer.

Betinget konvergens

har vi hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ divergerer.

Konvergens av potensrekker

En potensrekke kan ha ledd der både indeksvariabelen *n* og en potens av et reelt tall *x* inngår, som for eksempel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}} x^n = \frac{1}{4} x + \frac{2}{16} x^2 + \frac{3}{64} x^3 + \frac{4}{256} x^4 + \frac{5}{1024} x^4 + \ldots$$, taylorrekke, *a*=0

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{16}(x-1)^2 + \frac{1}{72}(x-1)^3 + \frac{1}{256}(x-1)^4$$, taylorrekke, *a*=1

Begge disse potensrekkene vil konvergere for verdier av *x* i et *konvergensintervall*. Med forholdstesten kan vi som regel finne dette intervallet.

Hvis ei potensrekke konvergerer, definerer den en funksjon *f*(*x*).

Eksempel 9

Finn konvergensintervallet til rekka . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}} x^n$

Forholdstester, $k = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)x^{n+1}}{2^{2(n+1)}}}{\frac{n x^n}{2^{2n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{2^{2(n+1)}} \cdot \frac{2^{2n}}{n x^n} \right| = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} x \right| = \frac{1}{4}|x|$

Rekka konvergerer for

$\frac{1}{4}|x| < 1$ eller også $-4 < x < 4$

men $x = \pm 4$ må testes separat.

For $x = -4$ blir rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n$ en alternerende rekke, med ledd $\pm n$, *divergerer*

For $x = 4$ blir rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}}(4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$ *Divergerer*

Konklusjon, rekka konvergerer for $-4 < x < 4$ ∃

Konvergensforholdene for en potensrekke er generelt slik at

Enten konvergerer rekka bare for $x = a$,

eller rekka konvergerer absolutt for alle $x \in \mathbb{R}$,

eller rekka konvergerer absolutt når $|x-a| < R$ og divergerer når $|x-a| > R$

der R er konvergensradien til rekka, dvs. $R = (G_ø - G_n)/2$.

Konvergens for grensene $x = G_n = a - R$ eller $x = G_ø = a + R$, må testes separat.
Sammenlikningstesten, integraltesten eller alternerende-rekke-test kan brukes ved $x = \pm R$.

Taylorrekker i praksis

Tilnærmet funksjonsverdi

Taylors formel gir at en funksjonsverdi kan tilnærmes av et taylorpolynom og en restverdi, $f(x)=P_N(x)+R_N(x)$. Restverdien utgjør feilen i en tilnærmet funksjonsverdi – som i praksis er avhengig av to forhold,

- hvor mange ledd vi tar med i P_N ,
- hvor raskt rekka konvergerer.

En alternerende rekke er gunstig å bruke fordi feilen i en tilnæringsverdi blir mindre enn det første leddet som utelates,

Summen av en konvergerende *alternerende* rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kan erstattes av delsummen S_N med en unøyaktighet høyst lik tallverdien av det første utelatte leddet.

Eksempel 10

Verdien til $\sin 6^{\circ}=\sin\frac{\pi}{30}$ kan beregnes tilnærmet av rekkeutviklingen for $\sin x$ med $a=0$,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+R_3 \qquad \sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$$

$$\sin 6^{\circ}=\sin\frac{\pi}{30}\approx\frac{\pi}{30}-\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{30}\right)^2=\frac{\pi}{30}-\frac{\pi^2}{5400}=0.10289205..$$

Det første leddet som utelates er $\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{30}\right)^5\approx 0.0000001$, slik at beregningen ovenfor kan angis som $\sin 6^{\circ}=0.102892$ ∃

Integralfunksjoner

Noen funksjonsuttrykk kan ikke integreres – det finnes ikke noen antiderivert. Likevel kan vi danne rekkeutviklingen av slike uttrykk og beregne tilnærmet verdi for den integrerte. Knepet her er å integrere ledd for ledd i rekkeutviklingen.

Eksempel 11

Integralet $g(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ eksisterer ikke, men kan uttrykkes som en rekke.

Starter med $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots$ (og erstatter *x*=*t*)

dividerer med *t* $\frac{\sin t}{t}=\frac{t}{t}-\frac{1}{3!}\frac{t^3}{t}+\frac{1}{5!}\frac{t^5}{t}-\frac{1}{7!}\frac{t^7}{t}+\ldots=1-\frac{1}{3!}t^2+\frac{1}{5!}t^4-\frac{1}{7!}t^6+\ldots$

og integrerer $$g(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x-\frac{1}{3\cdot 3!}x^3+\frac{1}{5\cdot 5!}x^5-\frac{1}{7\cdot 7!}x^7+\ldots$$

Dette resultatet kan uttrykkes som en rekkesum,

$$g(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}x^{2n+1}$$

∃

Summen av konvergente rekker

I avsnittet Potensrekker ble vi presentert for noen 'kjente rekker', for eksempel

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad .$$

Hvis vi så ble gitt oppgaven å finne rekkesummen 1 + 3 + 9/2 + 27/6 + 81/24 + ... ville det ikke være så lett å se at rekka for e^x kan være til hjelp. Men om vi ordner leddene ovenfor til

$$1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$$

'ser vi lett at' vår rekkesum er e^3 . Teknikken her blir altså å prøve å identifisere oppstillingen av leddene i rekka vi skal finne summen av med tilsvarende generelle ledd i en eller annen kjent rekke.

Det kan også bli aktuelt å finne en rekke ut fra et sumuttrykk, som neste eksempel viser.

Eksempel 12

Rekka $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n!}$ kan minne mistenkelig (?) om rekkeuttrykket for $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, men det siste inneholder ikke alternering – og *x*-potensene er forskjellige, *n* i stedet for *n*+2.

Med litt oppfinnsomhet kan vi starte med uttrykket for e^x og se om vi kan komme til vår rekke,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

Substituerer $x\to -x$ $$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$ - og vi har alternering

Multipliserer med x^2 $$x^2e^{-x}=x^2-x^3+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n!}$$

∃